Análisis Complejo: 2.2 Transformaciones conformes

Presentaciones de clase. B. Cascales

Universidad de Murcia

Curso 2011-2012

Ángulos orientados

Definición

Dado un par ordenado (u,v) de vectores no nulos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ (que se supone identificado con $\mathbb{C}$) el *ángulo orientado* del par (u,v) es el número real $\mathrm{Arg}(v/u) \in (-\pi,\pi]$.

Ángulos orientados

Definición

Dado un par ordenado (u, v) de vectores no nulos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ (que se supone identificado con $\mathbb{C}$) el *ángulo orientado* del par (u, v) es el número real $\operatorname{Arg}(v/u) \in (-\pi, \pi]$.

Definición: conservación ángulos orientados

$f : \Omega \to \mathbb{C}$, definida en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, conserva ángulos orientados en $a \in \Omega$ cuando cumple las condiciones siguientes:

a) Para cada $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$, existe $\delta_u > 0$ tal que $D(a, \delta_u) \subseteq \Omega$ y

$$f(a + tu) - f(a) \neq 0 \quad \text{si} \quad 0 < t < \delta_u.$$

b) Para cada $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$ el siguiente límite existe y no depende de u:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(a + tu) - f(a)}{u|f(a + tu) - f(a)|} = c$$

Ángulos orientados

Proposición

Para una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son equivalentes:

a) L conserva ángulos orientados en 0.

b) L conserva ángulos orientados en todos los puntos.

c) L es no singular y para cada par u, v con $|u| = |v| = 1$ se tiene que $\operatorname{Arg}(\frac{Lv}{Lu}) = \operatorname{Arg}(\frac{v}{u})$.

d) L es $\mathbb{C}$-lineal, no nula.

Ángulos orientados

Proposición

Para una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son equivalentes:

a) L conserva ángulos orientados en 0.

b) L conserva ángulos orientados en todos los puntos.

c) L es no singular y para cada par u, v con $|u| = |v| = 1$ se tiene que $\mathrm{Arg}(\frac{Lv}{Lu}) = \mathrm{Arg}(\frac{v}{u})$.

d) L es $\mathbb{C}$-lineal, no nula.

Proposición

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in \Omega$ con $df(a) \neq 0$, son equivalentes

a) f conserva ángulos orientados en a.

b) f es derivable en a en sentido complejo y $f'(a) \neq 0$ (e.d. $df(a)$ conserva ángulos orientados).

Ángulos orientados y funciones holomorfas

Proposición

Para una función holomorfa $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ son equivalentes

a) f conserva ángulos orientados en $a \in \Omega$.

b) $f'(a) \neq 0$.

Ángulos orientados y funciones holomorfas

Proposición

Para una función holomorfa $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ son equivalentes

a) f conserva ángulos orientados en $a \in \Omega$.

b) $f'(a) \neq 0$.

Teorema de la Aplicación abierta

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ no constante. entonces f es una aplicación abierta. Más concretamente, para cada $a \in \Omega$ si m es la multiplicidad de a como cero de $f - f(a)$, se puede determinar un entorno abierto $U_a \subset \Omega$ de a y $V_b \subset f(\Omega)$ entorno abierto de $b = f(a)$ tal que la $f - f(w)$ tiene exactamente m ceros distintos en U_a para cada $w \in V_b \setminus \{b\}$.

Teorema de la aplicación abierta

Teorema de la función inversa

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$ existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$, y un entorno abierto V_b de $b = f(a)$, tales que $f|_{U_a}$ es inyectiva, $V_b = f(U_a)$ y la inversa $g = (f|_{U_a})^{-1} : V_b \to U_a$ es holomorfa.

Teorema de la aplicación abierta

Teorema de la función inversa

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$ existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$, y un entorno abierto V_b de $b = f(a)$, tales que $f|_{U_a}$ es inyectiva, $V_b = f(U_a)$ y la inversa $g = (f|_{U_a})^{-1} : V_b \to U_a$ es holomorfa.

Proposición: pre-Teorema de la Aplicación abierta

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y a un cero aislado de $f(z) - f(a)$ de multiplicidad m. Entonces existe un entorno abierto $U_a \subset \Omega$ un disco $D(0,\delta)$ y una biyección $\varphi : U_a \to D(0,\delta)$ tales que

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)^m \quad \text{para todo} \quad z \in U_a$$

y $\varphi'(z) \neq 0$, $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para cada $z \in U_a$ y $w \in D(0,\rho)$.

Teorema de la aplicación abierta

Teorema de la función inversa

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$ existe un entorno abierto de a, $U_a \subset \Omega$, y un entorno abierto V_b de $b = f(a)$, tales que $f|_{U_a}$ es inyectiva, $V_b = f(U_a)$ y la inversa $g = (f|_{U_a})^{-1} : V_b \to U_a$ es holomorfa.

Proposición: pre-Teorema de la Aplicación abierta

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y a un cero aislado de $f(z) - f(a)$ de multiplicidad m. Entonces existe un entorno abierto $U_a \subset \Omega$ un disco $D(0, \delta)$ y una biyección $\varphi : U_a \to D(0, \delta)$ tales que

$$f(z) = f(a) + \varphi(z)^m \quad \text{para todo} \quad z \in U_a$$

y $\varphi'(z) \neq 0$, $(\varphi^{-1})'(w) \neq 0$ para cada $z \in U_a$ y $w \in D(0, \rho)$.

Nota

- El teorema de la función inversa utiliza el teorema de la función inversa para funciones diferenciables reales.
- La proposición que sigue, permite demostrar el teorema de la aplicación abierta.
- Una prueba alternativa del teorema de la aplicación abierta puede darse con el concepto de índice.

Aplicaciones conformes

Definición

Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que es conforme en un punto $a \in \Omega$ si es holomorfa en a y $f'(a) \neq 0$. f se dice conforme en Ω si f es conforme en cada $a \in \Omega$. Un isomorfismo conforme de un abierto Ω_1 sobre un abierto Ω_2 es una biyección $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ tal que f y f^{-1} son conformes.

Aplicaciones conformes

Definición

Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se dice que es conforme en un punto $a \in \Omega$ si es holomorfa en a y $f'(a) \neq 0$. f se dice conforme en Ω si f es conforme en cada $a \in \Omega$. Un isomorfismo conforme de un abierto Ω_1 sobre un abierto Ω_2 es una biyección $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ tal que f y f^{-1} son conformes.

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ inyectiva. Entonces para cada $a \in \Omega$ $f'(a) \neq 0$, $G = f(\Omega)$ es abierto y la inversa $f^{-1} : G \to \Omega$ es holomorfa. Consecuentemente, $(f^{-1})'(b) \neq 0$ para cada $b \in G$ y así f es un isomorfismo conforme de Ω sobre $f(\Omega)$.

Isomorfismos conformes

Corolario

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos y $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una biyección holomorfa. Entonces f es un isomorfismo conforme.

Isomorfismos conformes

Corolario

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos y $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una biyección holomorfa. Entonces f es un isomorfismo conforme.

Definición

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos. Denotamos por $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ el conjunto de isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2. Si $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) \neq \emptyset$ se dice que Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes. Si $\Omega_1 = \Omega_2 =: \Omega$ escribimos $\Gamma(\Omega) := \Gamma(\Omega, \Omega)$.

Isomorfismos conformes

Corolario

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos y $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una biyección holomorfa. Entonces f es un isomorfismo conforme.

Definición

Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos. Denotamos por $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$ el conjunto de isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2. Si $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2) \neq \emptyset$ se dice que Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes. Si $\Omega_1 = \Omega_2 =: \Omega$ escribimos $\Gamma(\Omega) := \Gamma(\Omega, \Omega)$.

Problema General en Representación Conforme

Decidir si dos abiertos Ω_1 y Ω_2 son conformemente equivalentes y en su caso encontrar un isomorfismo conforme entre ellos, mejor aún, determinar $\Gamma(\Omega_1, \Omega_2)$.

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

- El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado* ($\infty \notin \mathbb{C}$).

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

- El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado* ($\infty \notin \mathbb{C}$).
- En $\mathbb{C}_\infty$ adoptamos la aritmética usual con ∞.

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

- El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado* ($\infty \notin \mathbb{C}$).
- En $\mathbb{C}_\infty$ adoptamos la aritmética usual con ∞.
- $\mathbb{C}_\infty$ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto:

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

- El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado* ($\infty \notin \mathbb{C}$).
- En $\mathbb{C}_\infty$ adoptamos la aritmética usual con ∞.
- $\mathbb{C}_\infty$ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto:
  - Los entornos de los puntos de $a \in \mathbb{C}$ son por definición los entornos en $\mathbb{C}_\infty$.

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

- El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado* $(\infty \notin \mathbb{C})$.
- En $\mathbb{C}_\infty$ adoptamos la aritmética usual con ∞.
- $\mathbb{C}_\infty$ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto:
  - Los entornos de los puntos de $a \in \mathbb{C}$ son por definición los entornos en $\mathbb{C}_\infty$.
  - Para $a = \infty$ una base de entornos en $\mathbb{C}_\infty$ viene dada por:

$$V_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\},$$

    tomando todos los $r > 0$.

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

- El conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ se llama *plano complejo ampliado* ($\infty \notin \mathbb{C}$).
- En $\mathbb{C}_\infty$ adoptamos la aritmética usual con ∞.
- $\mathbb{C}_\infty$ se le dota de una topología para la cual es un espacio compacto:
  - Los entornos de los puntos de $a \in \mathbb{C}$ son por definición los entornos en $\mathbb{C}_\infty$.
  - Para $a = \infty$ una base de entornos en $\mathbb{C}_\infty$ viene dada por:

    $$V_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\},$$

    tomando todos los $r > 0$.
- $\mathbb{C}_\infty$ se puede identificar con

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

La aplicación $\Psi : \mathbb{C}_\infty \to S$ dada por $\Psi(\infty) = (0,0,1) =: N$ y

$$\Psi(x+iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right), z = (x+iy) \in \mathbb{C},$$

es una biyección cuya inversa es

$$\Psi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}.$$

Ψ establece un homeomorfismo entre $\mathbb{C}_\infty$ y S.

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

La aplicación $\Psi : \mathbb{C}_\infty \to S$ dada por $\Psi(\infty) = (0,0,1) =: N$ y

$$\Psi(x+iy) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right), z = (x+iy) \in \mathbb{C},$$

es una biyección cuya inversa es

$$\Psi^{-1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3}.$$

Ψ establece un homeomorfismo entre $\mathbb{C}_\infty$ y S.

Definición

La aplicación Ψ considerada en la proposición anterior recibe el nombre de *proyección estereográfica*.

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

La proyección estereográfica transforma rectas y círculos de $\mathbb{C}_\infty$ en circunferencias de S. La proyección estereográfica conserva ángulos orientados.

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

La proyección estereográfica transforma rectas y círculos de $\mathbb{C}_\infty$ en circunferencias de S. La proyección estereográfica conserva ángulos orientados.

Definición

La distancia cordal en $\mathbb{C}_\infty$ se define por las fórmulas

$$d_\infty(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \quad \text{si} \quad z,w\in\mathbb{C}$$

$$d_\infty(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad \text{si} \quad z\in\mathbb{C}$$

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

d_∞ es la distancia obtenida en $\mathbb{C}_\infty$ al trasladar la distancia euclídea en S mediante la proyección estereográfica Ψ. Se tienen las siguientes propiedades:

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

d_∞ es la distancia obtenida en $\mathbb{C}_\infty$ al trasladar la distancia euclídea en S mediante la proyección estereográfica Ψ. Se tienen las siguientes propiedades:

- d_∞ está acotada por 2,

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

d_∞ es la distancia obtenida en $\mathbb{C}_\infty$ al trasladar la distancia euclídea en S mediante la proyección estereográfica Ψ. Se tienen las siguientes propiedades:

- d_∞ está acotada por 2,
- la topología asociada a d_∞ es la topología de $\mathbb{C}_\infty$;

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

d_∞ es la distancia obtenida en $\mathbb{C}_\infty$ al trasladar la distancia euclídea en S mediante la proyección estereográfica Ψ. Se tienen las siguientes propiedades:

- d_∞ está acotada por 2,
- la topología asociada a d_∞ es la topología de $\mathbb{C}_\infty$;
- d_∞ restringida a $\mathbb{C}$ no es uniformemente equivalente a la distancia usual;

Reocordatorio sobre $\mathbb{C}_\infty$

Proposición

d_∞ es la distancia obtenida en $\mathbb{C}_\infty$ al trasladar la distancia euclídea en S mediante la proyección estereográfica Ψ. Se tienen las siguientes propiedades:

- d_∞ está acotada por 2,
- la topología asociada a d_∞ es la topología de $\mathbb{C}_\infty$;
- d_∞ restringida a $\mathbb{C}$ no es uniformemente equivalente a la distancia usual;
- la aplicación $z \to \frac{1}{z}$ es una isometría para d_∞ que interpretada en S corresponde a un giro de 180^0 alrededor del eje OX.

22/Nov/2006: Transformaciones de Möbius

Definición

Una *transformación de Möbius* es una aplicación $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ no constantes, definidas mediante funciones racionales de la forma:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C}, \ ad-bc \neq 0$$

donde se utilizan los convenios habituales:

$$\begin{array}{lll} T(\infty) = a/c \ \text{ y } \ T(-d/c) = \infty & \text{si} & c \neq 0 \\ T(\infty) = \infty & \text{si} & c = 0. \end{array}$$

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es el conjunto de las transformaciones de Möbius.

22/Nov/2006: Transformaciones de Möbius

Definición

Una *transformación de Möbius* es una aplicación $T : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ no constantes, definidas mediante funciones racionales de la forma:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0$$

donde se utilizan los convenios habituales:

$$\begin{array}{ll} T(\infty) = a/c \quad \text{y} \quad T(-d/c) = \infty & \text{si} \quad c \neq 0 \\ T(\infty) = \infty & \text{si} \quad c = 0. \end{array}$$

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es el conjunto de las transformaciones de Möbius.

Ejemplo

Las aplicaciones

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$ son transformaciones de Möbius que llevan el disco unidad en si mismo.

Identificación con matrices

Proposición

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es un grupo para la composición de aplicaciones.

1. Si $T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ con $a_i d_i - b_i c_i \neq 0$, $(i = 1, 2)$, entonces $T = T_1 \circ T_2$ se puede escribir en la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Identificación con matrices

Proposición

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es un grupo para la composición de aplicaciones.

1. Si $T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ con $a_i d_i - b_i c_i \neq 0$, $(i = 1, 2)$, entonces $T = T_1 \circ T_2$ se puede escribir en la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

2. Si $T(z) = \frac{az+b}{bz+d}$ es una transformación de Möbius, entonces $T^{-1}(w) = \frac{dw+b}{-cw+a}$.

Identificación con matrices

Proposición

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es un grupo para la composición de aplicaciones.

1. Si $T_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ con $a_i d_i - b_i c_i \neq 0$, $(i = 1, 2)$, entonces $T = T_1 \circ T_2$ se puede escribir en la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ donde
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$
2. Si $T(z) = \frac{az+b}{bz+d}$ es una transformación de Möbius, entonces $T^{-1}(w) = \frac{dw+b}{-cw+a}$.
3. $\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ se identifica como grupo con el de las matrices complejas inversibles 2×2 donde se han identificado las matrices que difieren en un múltiplo escalar no nulo.

23/Nov/2006: Generadores, puntos fijos

Definición

Las transformaciones de Möbius elementales son:

Traslaciones:	$z \to a + z, (a \in \mathbb{C})$	Giros:	$z \to e^{i\alpha} z, (\alpha \in \mathbb{R})$
Dilataciones:	$z \to rz, (r > 0)$	Inversión:	$z \to 1/z$

23/Nov/2006: Generadores, puntos fijos

Definición

Las transformaciones de Möbius elementales son:

Traslaciones:	$z \to a + z, (a \in \mathbb{C})$	Giros:	$z \to e^{i\alpha} z, (\alpha \in \mathbb{R})$
Dilataciones:	$z \to rz, (r > 0)$	Inversión:	$z \to 1/z$

Proposición

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ está generado por las transformaciones elementales.

23/Nov/2006: Generadores, puntos fijos

Definición

Las transformaciones de Möbius elementales son:

Traslaciones:	$z \to a + z, (a \in \mathbb{C})$	Giros:	$z \to e^{i\alpha} z, (\alpha \in \mathbb{R})$
Dilataciones:	$z \to rz, (r > 0)$	Inversión:	$z \to 1/z$

Proposición

$\mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ está generado por las transformaciones elementales.

Proposición

Sea $T(z) = \frac{az+b}{bz+d}$ una transformación de Möbius.

1. Si T no es la identidad, entonces T tiene a lo más dos puntos fijos.
2. T queda unívocamente determinada por los valores que toma en tres puntos distintos.

Razón doble

Corolario

Dada una terna z_2, z_3, z_4 formada por tres puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$, si w_2, w_3, w_4 es otra terna en las mismas condiciones, existe una única transformación de Möbius T que transforma la primera terna en la segunda, es decir, $T(z_i) = w_i, \quad i = 2, 3, 4.$

Razón doble

Corolario

Dada una terna z_2, z_3, z_4 formada por tres puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$, si w_2, w_3, w_4 es otra terna en las mismas condiciones, existe una única transformación de Möbius T que transforma la primera terna en la segunda, es decir, $T(z_i) = w_i, \quad i = 2, 3, 4.$

Definición

Dada una cuaterna ordenada z_1, z_2, z_3, z_4 formada por puntos de $\mathbb{C}_\infty$, donde los tres últimos z_2, z_3, z_4 se suponen distintos, se define la razón doble (z_1, z_2, z_3, z_4) como la imagen de z_1 mediante la única transformación de Möbius R que verifica

$$R(z_2) = 1, R(z_3) = 0, R(z_4) = \infty.$$

Razón doble y círculos

Proposición

La razón doble es un invariante para las transformaciones de Möbius: Si $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ y z_1, z_2, z_3, z_4 son puntos de $\mathbb{C}_\infty$, (donde z_2, z_3, z_4 se suponen distintos) se cumple:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

Razón doble y círculos

Proposición

La razón doble es un invariante para las transformaciones de Möbius: Si $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ y z_1, z_2, z_3, z_4 son puntos de $\mathbb{C}_\infty$, (donde z_2, z_3, z_4 se suponen distintos) se cumple:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

Ejemplo

Encontrar $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ tal que $T(i) = i$, $T(0) = -1$ y $T(-i) = -i$.

Razón doble y círculos

Proposición

La razón doble es un invariante para las transformaciones de Möbius: Si $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ y z_1, z_2, z_3, z_4 son puntos de $\mathbb{C}_\infty$, (donde z_2, z_3, z_4 se suponen distintos) se cumple:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

Ejemplo

Encontrar $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ tal que $T(i) = i$, $T(0) = -1$ y $T(-i) = -i$.

Proposición

Sea **C** la circunferencia (en sentido amplio) determinada por tres puntos distintos z_2, z_3, z_4 de $\mathbb{C}_\infty$. Entonces, $z \in \mathbf{C}$ si y sólo si $(z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}_\infty$.

Razón doble y círculos

Proposición

La razón doble es un invariante para las transformaciones de Möbius: Si $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ y z_1, z_2, z_3, z_4 son puntos de $\mathbb{C}_\infty$, (donde z_2, z_3, z_4 se suponen distintos) se cumple:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

Ejemplo

Encontrar $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ tal que $T(i) = i$, $T(0) = -1$ y $T(-i) = -i$.

Proposición

Sea **C** la circunferencia (en sentido amplio) determinada por tres puntos distintos z_2, z_3, z_4 de $\mathbb{C}_\infty$. Entonces, $z \in \mathbf{C}$ si y sólo si $(z, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}_\infty$.

Corolario

Las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias (en sentido amplio).

Simetría

Corolario

Dados dos círculos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ de $\mathbb{C}_\infty$, existe una transformación de Möbius tal que $T(\mathbf{C}) = \mathbf{C}'$.

Simetría

Corolario

Dados dos círculos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ de $\mathbb{C}_\infty$, existe una transformación de Möbius tal que $T(\mathbf{C}) = \mathbf{C}'$.

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$ pasando por tres puntos distintos z_2, z_3 y z_4 se dice que $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ son simétricos respecto de $\mathbf{C}$ si

$$(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}.$$

Simetría

Corolario

Dados dos círculos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ de $\mathbb{C}_\infty$, existe una transformación de Möbius tal que $T(\mathbf{C}) = \mathbf{C}'$.

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$ pasando por tres puntos distintos z_2, z_3 y z_4 se dice que $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ son simétricos respecto de $\mathbf{C}$ si

$$(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}.$$

Interpretación de la simetría

La noción de simetría definida anteriormente corresponde a las clásicas definiciones de simetría respecto de una recta o circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

Simetría

Corolario

Dados dos círculos $\mathbf{C}$ y $\mathbf{C}'$ de $\mathbb{C}_\infty$, existe una transformación de Möbius tal que $T(\mathbf{C}) = \mathbf{C}'$.

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$ pasando por tres puntos distintos z_2, z_3 y z_4 se dice que $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$ son simétricos respecto de $\mathbf{C}$ si

$$(z, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z^*, z_2, z_3, z_4)}.$$

Interpretación de la simetría

La noción de simetría definida anteriormente corresponde a las clásicas definiciones de simetría respecto de una recta o circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

Principio de simetría

Si z, z^* son puntos simétricos respecto a una circunferencia $\mathbf{C}$ y $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}_\infty)$ es una transformación de Möbius entonces $T(z)$ y $T(z^*)$ son simétricos respecto a la circunferencia imagen $T(\mathbf{C})$.

Orientación

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$, una orientación en $\mathbf{C}$ es dar una terna de puntos distintos $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$. La orientación en sentido contrario es z_2, z_4, z_3.

Orientación

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$, una orientación en $\mathbf{C}$ es dar una terna de puntos distintos $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$. La orientación en sentido contrario es z_2, z_4, z_3.

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$ y una orientación en $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$, llamamos lado izquierdo, resp. derecho, de $\mathbf{C}$ respecto de la orientación a

$$\text{Lado Izqdo}\mathbf{C}_{(z-2,z_3,z_4)} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Im}(z, z_2, z_3, z_4) < 0\}.$$

$$\text{Lado Der.}\mathbf{C}_{(z-2,z_3,z_4)} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Im}(z, z_2, z_3, z_4) > 0\}.$$

Orientación

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$, una orientación en $\mathbf{C}$ es dar una terna de puntos distintos $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$. La orientación en sentido contrario es z_2, z_4, z_3.

Definición

Dado un círculo $\mathbf{C}$ en $\mathbb{C}_\infty$ y una orientación en $z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$, llamamos lado izquierdo, resp. derecho, de $\mathbf{C}$ respecto de la orientación a

$$\text{Lado Izqdo}\mathbf{C}_{(z-2,z_3,z_4)} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Im}(z, z_2, z_3, z_4) < 0\}.$$

$$\text{Lado Der.}\mathbf{C}_{(z-2,z_3,z_4)} := \{z \in \mathbb{C}_\infty : \operatorname{Im}(z, z_2, z_3, z_4) > 0\}.$$

El principio de conservación de las orientaciones

Si circunferencia $\mathbf{C}$ se orienta mediante la terna (z_2, z_3, z_4) y la imagen $T(\mathbf{C})$ se orienta mediante la terna imagen $(T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ entonces T transforma el lado izquierdo (resp. derecho) de $\mathbf{C}$ en el lado izquierdo (resp. derecho) de $T(\mathbf{C})$.

Ejemplos

$$\Omega_1 \xrightarrow{T} \Omega_2$$

Semiplano abierto	Disco abierto
Cuadrante abierto	Semidisco
Región limitada por circunferencias tangentes	Región limitada por dos rectas paralelas
Región limitada por circunferencias que no se cortan	Corona circular $A(0, r, R)$, $(^*)$

Problema para entregar: 21/Dic/2006

Problema

1. Pruébese que una transformación de Möbius T deja fijo $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ si, y sólo si, T puede escribirse como

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{con} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \; ad-bc \neq 0.$$

2. Dedúzcase de lo anterior que la definición de simetría respecto de un círculo dada a través de la razón doble, es independiente de los tres puntos distintos elegidos en el círculo.
3. Pruébese con un argumento de conexión que si T es una transformación de Möbius que lleva una recta en una circunferencia y un punto de un semiespacio determinado por la recta va al interior del disco determinado por la circunferencia, entonces la imagen de ese semiespacio es exactamente el interior de la circunferencia.